Chers élèves,

Vous allez entrer en septembre en classe préparatoire ECE 1. Félicitations !

Vous aurez 8 heures de mathématiques par semaine et une heure d'informatique. Le programme est chargé, le rythme sera donc élevé tout au long de l'année. Avant les recommandations d'usage que je vous prodiguerai dès la rentrée (apprentissage du cours, méthode, rythme de travail...), je vous propose de réviser les bases du calcul depuis les classes du collège. Si faire des mathématiques ne se résume pas à faire des calculs (mais c'est l'essentiel de la discipline !), on ne peut pas en faire sérieusement à un niveau élevé sans être à l'aise sur les manipulations élémentaires.

Je vous laisse découvrir les thèmes que j'ai sélectionné pour ces révisions. Les exercices doivent être préparés et faits avant la rentrée, même au brouillon. En effet, vous passerez au tableau sur les premières séances de l'année pour présenter vos calculs de sorte que nous pointions les règles importantes et les erreurs à éviter.

Il n'y aura que peu de séances consacrées à ce travail (une semaine, tout au plus). Il vous appartient de saisir cette occasion pour bien lancer votre année et être en confiance avant que les difficultés ne pointent leur nez.

Bon travail à tous !

Table des matières

1 Fractions

On dit qu'un nombre est *rationnel* s'il peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ où a est un entier relatif (le *numérateur*) et b un entier naturel non nul (le *dénominateur*). Les règles élémentaires de calcul sur les fractions sont les suivantes.

- Le signe d'une fraction est porté par le numérateur ou le dénominateur. On a en effet pour tout a et b non nul $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ et $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$.
- Pour ajouter ou soustraire deux fractions, il est nécessaire de les **réduire au même dénominateur**, en utilisant que pour tous a, b, c entiers avec b et c non nuls on a $\frac{a}{b} = \frac{a\times c}{b\times c}$.
- Cette même règle permet la simplification des fractions pour les rendre **irréductibles**. On doit toujours chercher à savoir si une fraction est irréductible et la seule façon pour simplifier une fraction est d'avoir un facteur commun entre numérateur et dénominateur.
- La multiplication de fractions obéit à la règle $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a\times c}{b\times d}$. Diviser par une fraction, c'est multiplier par son inverse à savoir $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a\times d}{b\times c}$. On prêtera attention au trait principal de fraction !

Exercice 1

Les nombres suivants sont-ils des rationnels ?

$$\text{a) } \frac{2,24}{3,36} \qquad \text{b) } \frac{\pi}{\sqrt{2}} \qquad \text{c) } \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$$

Exercice 2

Mettre sous forme irréductible les fractions suivantes

$$\text{a) } \frac{1}{2} + \frac{3}{7} \qquad \text{b) } \frac{1}{3} + \frac{5}{6} \qquad \text{c) } \frac{5}{7} \times \frac{21}{25} \qquad \text{d) } \frac{\frac{4}{3}}{\frac{6}{11}} \qquad \text{e) } \frac{2}{5} - \frac{7}{10} \times \frac{5}{3}$$

$$\text{f) } \frac{1+\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{5}} \qquad \text{g) } \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}} \qquad \text{h) } \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{11}{24}\right) \times \frac{8}{49}$$

Exercice 3

Soit n un entier naturel. Peut-on simplifier les fractions suivantes lorsqu'elle sont bien définies ?

$$\text{a) } \frac{n+2}{n-4} \qquad \text{b) } \frac{n+4}{4n+16} \qquad \text{c) } \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{n-1}{n}$$

2 Puissances, racines carré et racines n-ième

On rappelle que pour un nombre réel x quelconque et n un entier naturel non nul on définit $x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}$. Lorsque x est non nul, on pose $x^0 = 1$ et $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

On a les règles suivantes pour x, y des nombres réels, n, m des entiers naturels (si défini)

$$x^n x^m = x^{n+m}, \qquad (xy)^n = x^n y^n, \qquad \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}, \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \qquad (x^n)^m = x^{n\times m}.$$

Si x est un nombre positif, on appelle *racine carré* de x l'unique nombre réel positif a vérifiant $a^2 = x$. On le note $a = \sqrt{x}$.

Plu généralement, si n est un entier naturel quelconque, on appelle *racine n-ième* de x

- Si n est impair, l'unique nombre réel a tel que $a^n = x$.
- Si n est pair, l'unique nombre positif a tel que $a^n = x$ qui n'existe que si x est positif.

Dans les cas où cette racine n-ième existe, elle est notée $\sqrt[n]{a}$. La notation $a = x^{\frac{1}{n}}$ est admise et sera expliquée plus tard dans l'année. Ces puissances aux exposants fractionnaires bénéficient des mêmes règles de calcul que les puissances aux exposants entiers. En particulier, on a pour la racine carré pour tout x réel et y réel (si défini)

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}, \qquad \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}.$$

Exercice 4

Ecrire comme un produit de puissances de 2, 3 et 5 les nombres suivants.

$$\text{a)}\ 2^3 \times 4^5 \times 8^{-1} \qquad \text{b)}\ 25 \times 3^3 \times (2^4)^2 \qquad \text{c)}\ \frac{1000}{5^4 \times 2^6} \qquad \text{d)}\ \frac{(-2)^5 \times 6^4 \times 5^{-5}}{20^3 \times 3^3}$$

Exercice 5

Simplifier les expressions suivantes comportant des racines. On devra éliminer si possible les racines aux dénominateurs des fractions.

$$\text{a)}\ \sqrt{6} \times \sqrt{32} \qquad \text{b)}\ \frac{\sqrt{8} \times \sqrt{42}}{\sqrt{3} \times \sqrt{56}} \qquad \text{c)}\ \sqrt{75} + \sqrt{45} \qquad \text{d)}\ (2 + \sqrt{3})^2$$

$$\text{e)}\ \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \qquad \text{f)}\ \frac{1 + \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} \qquad \text{g)}\ \sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{2}}}$$

Exercice 6

1. Combien vaut $(-1)^n$ en fonction de n ? On pourra regarder quelques valeurs particulières.
2. Calculer et simplifier pour tout entier n les expressions suivantes

$$\text{a)}\ (-1)^{2n} \qquad \text{b)}\ (-1)^n + (-1)^{n+1} \qquad \text{c)}\ (-1)^n - (-1)^{1-n}.$$

3 Calcul littéral

Le calcul littéral permet de manipuler des expressions contenant des variables ou des inconnues. Il repose sur les règles suivantes, également valables pour le calcul numérique.

- Le développement, faisant appel à la distributivité ou double distributivité

$$a(b+c)=ab+bc, \qquad (a+b)c=ac+dc, \qquad (a+b)(c+d)=ac+bc+ad+db$$

  et il existe des déclinaisons pour obtenir la triple distributivité etc. En cas de doute, on n'hésitera pas à faire toutes les opérations avec les trois seules règles décrites. On dispose également des identités remarquables

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2, \qquad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2, \qquad (a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

- La factorisation et l'opération inverse du développement. La lecture "à l'envers" des précédentes règles donnent alors la factorisation par l'identification d'un facteur commun à des termes d'une somme ou la lecture d'une identité remarquable développée.

Il est possible d'envisager du calcul littéral avec des fractions (*fraction rationnelle de variables*). Il faut alors combiner les règles propres aux fractions avec celles décrites ci-dessus.

Exercice 7

Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $(2x+1)(5x-2)$ b) $(x+1)(x+2)(x+3)$ c) $(3x-1)^2$ d) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$

e) $(x+1)^3$ f) $(x+6)^2-(x^2-5)$ g) $(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

Exercice 8

Factoriser les expressions suivantes.

a) x^2+5x b) $(3x-2)(x+2)-(x+2)^2$ c) x^2-6x+9

d) x^3+4x^2-2x e) x^3-9x f) x^3-1

Exercice 9

1. Réduire au même dénominateur les fractions de la variable x suivantes :

   a) $\dfrac{x-1}{x+2}+\dfrac{5x+4}{2x+4}$ b) $\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{3x+1}{2x-1}$ c) $3+\dfrac{2}{5x+7}$

2. Déterminer les réels a,b,c (ne dépendant pas de x) tels que pour tout x réel on ait $\dfrac{4x^2-5x+8}{x-3}=ax+b+\dfrac{c}{x-3}$.

4 Equations et inéquations

Une équation (resp. inéquation) est une égalité (resp. une inégalité) comportant au moins une inconnue. Les solutions sont les valeurs de(s) inconnue(s) qui vérifient l'égalité (resp. l'inégalité).

En règle générale, on tente toujours de résoudre les équations par des équivalences logiques, signifiant que l'on peut passer de l'une à l'autre des équations équivalentes (en général par une opération). Les opérations rendant équivalentes des équations sont :

- Ajouter ou soustraire la même quantité de part et d'autre de l'égalité ou inégalité.
- Multiplier ou diviser par une quantité **non nulle** dans une égalité.
- Multiplier ou diviser par une quantité **strictement positive** dans une égalité donne une inégalité de même sens équivalente. On change le sens lorsque l'on multiplie ou divise par une quantité strictement négative.

Si on ne peut pas résoudre par équivalence donc par implications seules, alors il faudra faire une réciproque en examinant si toutes les solutions potentielles vérifient ou pas l'égalité ou inégalité de départ.

On rappelle que la règle du produit nul affirme que $AB = 0$ équivaut à ($A = 0$ ou $B = 0$). En revanche, $\frac{A}{B} = 0$ équivaut à $A = 0$ (B est nécessairement non nul dans ce cas). Résoudre une inéquation du type $AB \geqslant 0$ ou $\frac{A}{B} \geqslant 0$ mène à une étude du signe de l'expression AB ou $\frac{A}{B}$, pouvant se faire à l'aide d'un tableau de signe. On n'oubliera pas de signaler les valeurs interdites qui annulent B dans le cas d'une fraction.

Enfin, la résolution d'une équation ou inéquation doit toujours être conclue par l'ensemble des solutions, donné par $\mathcal{S} = ...$.

Exercice 10

Résoudre les équations suivantes.

a) $3x + 5 = -2x + 1$ b) $x + 2 - (2x + 1) = -x + 7$ c) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

d) $(3x + 5)(6x - 4) = 0$ e) $x^2 = 4$ f) $1 - \dfrac{x-1}{2x+1} = 0$ g) $x^3 = 8$

Exercice 11

Résoudre les inéquations suivantes.

a) $2x - 5 \leqslant x - 9$ b) $3x - 6 \leqslant 4x + 4$ c) $(x + 1)(x - 5) \geqslant 0$ d) $(4x - 1)^2 \leqslant 0$

e) $\dfrac{8x-7}{4x+3} \geqslant 0$ f) $x^2 + 3x \leqslant 0$ g) $x^2 + 6x + 9 \geqslant 0$