HEC ECS 1 : Les mathématiques

ROBIN Loris

08/07/2019

Les mathématiques en classe ECS tourne autour de 3 grandes lignes : l'analyse (suites, fonctions, intégrales) et les probabilités ont déjà été vu au lycée et seront fortement approfondis, puis nous découvrirons l'algèbre linéaire (matrices, espaces vectoriels ...). Il n'y a plus de géométrie.
L'usage des calculatrices sera interdit car celles ci ne sont pas admises aux concours.
Nous verrons également un nouveau langage pour l'algorithmique et la programmation : Scilab que nous travaillerons en salle informatique.
Il n'y a pas de manuel de cours pour cette année : les documents vous serons fournis.
Durant l'année, le rythme de travail sera soutenu avec 9 heures de cours et un travail personnel dont l'objectif est 1 heure par jour et 4 heures par week-end. Pour cela, nous commencerons par un objectif de 30min de travail personnel par jour (et 2 heures par week-end) puis nous augmenterons le rythme en milieu d'année. Pour les vacances cet été, reposez vous, je ne vous demande que de vous remettre au mathématiques la dernière semaine et de réaliser les exercices suivants en devoir en temps libre. Ils seront ramassés le jour de la rentrée. Soyez rigoureux sur la rédaction, et pensez bien à démontrer vos affirmations.

Exercice 1

Soit m un paramètre réel et l'équation d'inconnue x suivante :

$$x^2 - 3mx + 9 = 0$$

1. Calculer le discriminant de l'équation en fonction de m.
2. En déduire le nombre de solutions de cette équation suivant les valeurs de m.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = (x^2 - 2)\ln(x)$ pour $x > 0$.

1. Déterminer le signe de $f(x)$ en fonction de x.
2. Calculer les images de e, $\frac{1}{e}$, e^2 et $\sqrt{e}$ (des valeurs exactes simplifiées sont attendues).
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Déterminer l'ensemble de définition et les limites aux 4 bords de cet ensemble.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
3. En considérant le trinôme $y^2 - y + 1$, montrer que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. En déduire le tableau de variation de la fonction f.

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_n = \int_n^{n+1} e^{-2x}\,dx$$

.

1. Calculer u_n en fonction de n.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
3. Déterminer la limite de cette suite.

Exercice 5

Soit $a \in \mathbb{R}$.
Résoudre en fonction de a le système : $\left\{\begin{array}{rcl} ax+y & = & 1 \\ x+ay & = & 1 \end{array}\right.$

Exercice 6

1. Développer $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ pour a et b réels positifs.
2. En déduire que pour tous réels positifs a et b, on a $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$.
3. En déduire que pour tous réels positifs a et b, on a $\dfrac{1}{2}(ln(a)+ln(b)) \leqslant ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$.

Exercice 7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n non nul $u_{n+1} = \dfrac{3u_n-2}{u_n}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

Exercice 8

Soit f la fonction définie par $f(x) = ln(1+e^x) - ln(1+e^{-x})$ pour tout x.

1. Montrer que l'ensemble de définition de la fonction f est $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout réel x, on a $f(x) = x$.
3. Déduire de la question précédente que $\dfrac{e^x}{1+e^x} + \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = 1$ sans mettre au même dénominateur.

Exercice 9

On dispose de deux urnes U et V. Dans U, il y a 2 boules noires et 2 boules blanches. Dans V, il y a 6 boules noires et 2 boules blanches. On choisit une des deux urnes au hasard (de manière équiprobable) et on en extrait une boule. On notera :
- U : "on choisit l'urne U".
- N : "on tire une boule noire".

1. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit noire ?
2. On tire une boule noire. Quelle est alors la probabilité d'avoir pioché dans l'urne U ?

Exercice 10

Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{-x}ln(1+e^x)$ pour tout x.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
2. Montrer que tout réel x, on a
$$f(x) = 1 - f'(x) - \frac{e^x}{1+e^x}$$
3. Montrer alors que $\int_0^1 f(x)\,dx = 1+2ln(x) - \left(\dfrac{e+1}{e}\right) ln(1+e)$.