HEC ECS 1 : Les mathématiques

ROBIN Loris

30/06/2020

Les mathématiques en classe ECS tourne autour de 3 grandes lignes : l'analyse (suites, fonctions, intégrales) et les probabilités ont déjà été vu au lycée et seront fortement approfondis, puis nous découvrirons l'algèbre linéaire (matrices, espaces vectoriels ...).
Il n'y a plus de géométrie.
L'usage des calculatrices sera interdit car celles ci ne sont pas admises aux concours.
Nous verrons également un nouveau langage pour l'algorithmique et la programmation : Scilab que nous travaillerons en salle informatique.
Il n'y a pas de manuel de cours pour cette année : les documents vous serons fournis.
Durant l'année, le rythme de travail sera soutenu avec 9 heures de cours et un travail personnel dont l'objectif est 1 heure par jour et 4 heures par week-end. Pour cela, nous commencerons par un objectif de 30-45min de travail personnel par jour (et 2 heures par week-end) puis nous augmenterons le rythme en milieu d'année. Pour les vacances cet été, pensez à vous reposer, je vous demande néanmoins 2 choses : un site web d'exercices est en cours de création (le lien vous sera envoyé par email), essayez de prendre le temps de réaliser des exercices régulièrement sur celui-ci, ils sont adaptés au besoin des cours à venir (je vous décrirai la marche à suivre et le rythme sur le mail) ; de plus, je vous demande de reprendre les 2 dernières semaines en réalisant les exercices si dessous. Ils seront ramassés le jour de la rentrée. Soyez rigoureux sur la rédaction, et pensez bien à démontrer vos affirmations.
En cas de question, je suis disponible par mail : *loris-simon.robin@ac-grenoble.fr* (pensez à au moins m'envoyez votre adresse mail).

Exercice 1

Soit m un paramètre réel et l'équation d'inconnue x suivante :

$$x^2 - 3mx + 9 = 0$$

1. Calculer le discriminant de l'équation en fonction de m.
2. En déduire le nombre de solutions de cette équation suivant les valeurs de m.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = (x^2 - 2)\ln(x)$ pour $x > 0$.

1. Déterminer le signe de $f(x)$ en fonction de x.
2. Calculer les images de e, $\frac{1}{e}$, e^2 et $\sqrt{e}$ (des valeurs exactes simplifiées sont attendues).
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

1. Déterminer l'ensemble de définition et les limites aux 4 bords de cet ensemble.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
3. En considérant le trinôme $y^2 - y + 1$, montrer que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. En déduire le tableau de variation de la fonction f.

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_n = \int_n^{n+1} e^{-2x}\,dx$$

.

1. Calculer u_n en fonction de n.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
3. Déterminer la limite de cette suite.

Exercice 5

Soit $a \in \mathbb{R}$.
Résoudre en fonction de a le système : $\left\{\begin{array}{rcl} ax+y & = & 1 \\ x+ay & = & 1 \end{array}\right.$

Exercice 6

1. Développer $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ pour a et b réels positifs.
2. En déduire que pour tous réels positifs a et b, on a $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$.
3. En déduire que pour tous réels positifs a et b, on a $\dfrac{1}{2}(ln(a)+ln(b)) \leqslant ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$.

Exercice 7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n non nul $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{u_n}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

Exercice 8

Soit f la fonction définie par $f(x) = ln(1+e^x) - ln(1+e^{-x})$ pour tout x.

1. Montrer que l'ensemble de définition de la fonction f est $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout réel x, on a $f(x) = x$.
3. Déduire de la question précédente que $\dfrac{e^x}{1+e^x} + \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = 1$ sans mettre au même dénominateur.

Exercice 9

On dispose de deux urnes U et V. Dans U, il y a 2 boules noires et 2 boules blanches. Dans V, il y a 6 boules noires et 2 boules blanches. On choisit une des deux urnes au hasard (de manière équiprobable) et on en extrait une boule. On notera :

- U : "on choisit l'urne U".
- N : "on tire une boule noire".

1. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit noire ?
2. On tire une boule noire. Quelle est alors la probabilité d'avoir pioché dans l'urne U ?

Exercice 10

Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{-x}ln(1+e^x)$ pour tout x.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
2. Montrer que tout réel x, on a

$$f(x) = 1 - f'(x) - \frac{e^x}{1+e^x}$$

3. Montrer alors que $\int_0^1 f(x)\,dx = 1 + 2ln(2) - \left(\dfrac{e+1}{e}\right) ln(1+e)$.