

HEC ECS 1 : Les mathématiques

ROBIN Loris

30/06/2021

Les mathématiques en classe ECS tourne autour de 3 grandes lignes : l'analyse (suites, fonctions, intégrales) et les probabilités ont déjà été vu au lycée et seront fortement approfondis, puis nous découvrirons l'algèbre linéaire (matrices, espaces vectoriels ...). Il n'y a plus de géométrie.

L'usage des calculatrices sera interdit car celles ci ne sont pas admises aux concours.

Nous verrons également un langage pour l'algorithmique et la programmation : Python que nous travaillerons en salle informatique.

Il n'y a pas de manuel de cours pour cette année : les documents vous seront fournis.

Durant l'année, le rythme de travail sera soutenu avec 9 heures de cours et un travail personnel dont l'objectif est 1 heure par jour et 4 heures par week-end. Pour les vacances cet été, pensez à vous reposer, je vous demande néanmoins 2 choses : sur ce site web (sur lequel seront déposés des documents de cours) : <https://www.melomaths.fr>, vous trouverez des exercices interactifs, l'objectif étant d'essayer d'obtenir "juste" au moins une fois sur chaque exercice. Pour cela, une pratique régulière de 2-3 petits exercices par jour cet été est recommandé (voici le lien <https://www.melomaths.fr/interactif/niveau/5/>, lisez bien la partie "A lire avant de commencer les exercices"); de plus, je vous demande de reprendre les 2 dernières semaines en réalisant les exercices si dessous. Ils seront ramassés le jour de la rentrée. Soyez rigoureux sur la rédaction, et pensez bien à démontrer vos affirmations.

En cas de question, je suis disponible par mail : loris-simon.robin@ac-grenoble.fr (pensez à au moins m'envoyer votre adresse mail).

Exercice 1

Soit m un paramètre réel et l'équation d'inconnue x suivante :

$$x^2 - 3mx + 9 = 0$$

1. Calculer le discriminant de l'équation en fonction de m .
2. En déduire le nombre de solutions de cette équation suivant les valeurs de m .

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = (x^2 - 2)\ln(x)$ pour $x > 0$.

1. Déterminer le signe de $f(x)$ en fonction de x .
2. Calculer les images de e , $\frac{1}{e}$, e^2 et \sqrt{e} (des valeurs exactes simplifiées sont attendues).
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

1. Déterminer l'ensemble de définition et les limites aux 4 bords de cet ensemble.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
3. En considérant le trinôme $y^2 - y + 1$, montrer que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. En déduire le tableau de variation de la fonction f .

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_n = \int_n^{n+1} e^{-2x} dx$$

1. Calculer u_n en fonction de n .
2. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique.
3. Déterminer la limite de cette suite.

Exercice 5

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Résoudre en fonction de a le système :
$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + ay = 1 \end{cases}$$

Exercice 6

1. Développer $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$ pour a et b réels positifs.
2. En déduire que pour tous réels positifs a et b , on a $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.
3. En déduire que pour tous réels positifs a et b , on a $\frac{1}{2}(\ln(a) + \ln(b)) \leq \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Exercice 7

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n non nul $u_{n+1} = \frac{3u_n - 2}{u_n}$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

Exercice 8

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(1 + e^x) - \ln(1 + e^{-x})$ pour tout x .

1. Montrer que l'ensemble de définition de la fonction f est \mathbb{R} .
2. Montrer que pour tout réel x , on a $f(x) = x$.
3. Déduire de la question précédente que $\frac{e^x}{1 + e^x} + \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} = 1$ sans mettre au même dénominateur.

Exercice 9

On dispose de deux urnes U et V . Dans U , il y a 2 boules noires et 2 boules blanches. Dans V , il y a 6 boules noires et 2 boules blanches. On choisit une des deux urnes au hasard (de manière équiprobable) et on en extrait une boule. On notera :

- U : "on choisit l'urne U ".
- N : "on tire une boule noire".

1. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit noire ?
2. On tire une boule noire. Quelle est alors la probabilité d'avoir pioché dans l'urne U ?

Exercice 10

Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$ pour tout x .

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x .
2. Montrer que tout réel x , on a

$$f(x) = 1 - f'(x) - \frac{e^x}{1 + e^x}$$

3. Montrer alors que $\int_0^1 f(x) dx = 1 + 2\ln(2) - \left(\frac{e+1}{e}\right) \ln(1 + e)$.