Chers élèves,

Vous allez entrer en septembre en classe préparatoire ECG, avec la spécialité mathématiques appliquées. Félicitations !

Vous aurez 8 heures de mathématiques par semaine et une heure d'informatique. Le programme est chargé, le rythme sera donc élevé tout au long de l'année. Avant les recommandations d'usage que je vous prodiguerai dès la rentrée (apprentissage du cours, méthode, rythme de travail...), je vous propose de réviser les bases du calcul depuis les classes du collège. Si faire des mathématiques ne se résume pas à faire des calculs, on ne peut pas en faire sérieusement à un niveau élevé sans être à l'aise sur les manipulations élémentaires.

Une fiche d'exercices sera également fournie pour s'entrainer (voir les consignes sur cette fiche). **Il faut faire ces exercices après avoir revu l'ensemble des notions présentées dans ce document.**

Il n'y aura que peu de séances consacrées à ce travail (une semaine, tout au plus). Il vous appartient de saisir cette occasion pour bien lancer votre année et être en confiance avant que les difficultés n'arrivent.

Bon travail à tous !

Table des matières

1 Notations diverses

Les lettres grecques fréquemment utilisées sont les suivantes

α : alpha β : beta γ : gamma δ : delta ε : epsilon η : eta π : pi

θ : theta λ : lambda μ : mu ρ : rho φ : phi ψ : psi ω : omega

et les lettres majuscules

Γ : Gamma Δ : Delta Π : Pi Σ : Sigma Ω : Omega

Les lettres (latines ou grecques) servent en général à noter un nombre quelconque, une *variable* dans une expression littérale, ou encore une *inconnue* dans une équation ou inéquation.

Lorsque l'on a une certaine quantité de nombres n nombres (où n est un entier), on évite de noter ces nombres $a, b, c..., x, y, z, \alpha, \beta, ...$. On préfère la désignation par une lettre suivi d'un *indice*, donnant le "numéro" du nombre dans l'énumération

$$x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n.$$

Par exemple, si on dispose de 100 nombres, on peut les désigner par $x_1, x_2, ..., x_{99}, x_100$.
La numérotation peut aussi débuter à 0, ce qui rajoutera un nombre à l'énumération.

2 Les ensembles de nombres

L'*appartenance* d'un élément à un ensemble est notée par $\in$ (en général, un nombre à un ensemble, un intervalle).

L'*inclusion* d'un ensemble dans un autre ensemble est notée par $\subset$ ou encore $\subseteq$ pour signifier qu'il peut y avoir égalité des ensembles, comme on a les deux symboles $<$ et $\leqslant$.

On donne ci-après les ensembles usuels de nombres.

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des *entiers naturels* : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.

$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des *entiers relatifs* : $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$.

$\mathbb{D}$ est l'ensemble des *nombres décimaux*, c'est-à-dire l'ensemble des nombres admettant une écriture **finie** après la virgule. $6,2$ est dans $\mathbb{D}$, $\frac{1}{4} = 0,25$ aussi, mais pas $\frac{1}{3} = 0,33333...$.

$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des *nombres rationnels*, c'est-à-dire l'ensemble des nombres pouvant se mettre sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a dans $\mathbb{Z}$ et b dans $\mathbb{N}$ privé de 0. π, $\sqrt{2}$ ne sont pas rationnels.

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres connues à notre programme. Ils admettent des écritures décimales, éventuellement illimitées.

On a les inclusions strictes (pas d'égalité des ensembles) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Tout ensemble de nombres que l'on prive de 0 sera noté avec $*$, comme $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{R}^*$. Considérer l'ensemble des nombres positifs d'un ensemble se fera par $+$, comme $\mathbb{R}_+$.

Dans $\mathbb{R}$, on a les *intervalles*, qui sont d'une des formes suivantes

$$[a,b] \qquad]a,b] \qquad [a,b[\qquad]a,b[\qquad [a,+\infty[\qquad]a,+\infty[\qquad]-\infty,b] \qquad]-\infty,b[.$$

L'ensemble des nombres se trouvant dans un intervalle est l'ensemble des nombres compris entre les deux bornes données, compris ou non selon la position des crochets. Les symboles $-\infty$ et $+\infty$ signifient qu'il n'y a pas de borne inférieure et/ou pas de borne supérieure.

On peut considérer l'intersection ou l'union d'ensembles ou plus particulièrement d'intervalles.

Si E et F sont deux ensembles (de nombres), on note $E \cap F$ l'*intersection* de E et F l'ensemble des nombres se trouvant à la fois dans E et F ; on note $E \cup F$ l'*union* ou *réunion* de E et F l'ensemble des nombres se trouvant dans E, F ou les deux à la fois.

Une intersection d'intervalle est toujours un intervalle, une réunion d'intervalle n'est pas forcément un intervalle.

3 Opérations, priorités et parenthèses

Les opérations considérées ici $+, -, \times, \div$. Très souvent, la multiplication est notée par un point ou par *juxtaposition*, à savoir $a \times b = a.b = ab$.

Les additions et multiplications sont associatives, c'est-à-dire qu'on a pour tous nombres a, b, c

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

et dans un tel cas, les parenthèses sont inutiles car l'ordre des opérations n'a pas d'importance.

Les additions et multiplications sont commutatives, c'est-à-dire qu'on a pour tous nombres a et b

$$a + b = b + a \qquad a \times b = b \times a.$$

Ces propriétés ne sont pas vérifiées par la soustraction et la division.

Les opérations s'effectuent, sans indications supplémentaires, de la gauche vers la droite. Les règles de priorité disent qu'en l'absence de toutes précisions dans le calcul, la multiplication et la division ont toujours priorité sur l'addition et la soustraction. Il n'y a pas de priorités entre une multiplication et une division, ni même entre une addition et une soustraction tant que la lecture s'effectue toujours de gauche à droite.

Si des priorités doivent être données sur des calculs qui ne rentrent pas dans les priorités usuelles citées, on utilise alors des *parenthèses*, des *sur-parenthèses* ou encore des *crochets*. On veillera à ce qu'il y ait autant de symboles ouvrants que fermants.

Une parenthèse est inutile lorsqu'elle donne priorité à une opération qui l'a déjà.

4 Fractions

Une fraction est un nombre sous la forme $\frac{a}{b}$ où a (le *numérateur*) est un nombre quelconque et b (le *dénominateur*) est non nul. Les règles élémentaires de calcul sur les fractions sont les suivantes.

- Le signe d'une fraction est porté par le numérateur ou le dénominateur. On a en effet pour tout a et b non nul
$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} \qquad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}.$$
- Le changement de dénominateur s'effectue en utilisant que pour a quelconque et b, c non nuls on a
$$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}.$$
Cette même règle, à l'inverse, permet la simplification des fractions pour les rendre *irréductibles*. On doit toujours chercher à savoir si une fraction est irréductible et la seule façon pour simplifier une fraction est d'avoir un facteur commun entre numérateur et dénominateur.

- Pour ajouter ou soustraire deux fractions, il est nécessaire de les **réduire au même dénominateur**, en utilisant que pour tous a, b, c, d avec b, d non nuls on a
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{db} = \frac{ad + bc}{bd}.$$
- La multiplication de fractions obéit à la règle
$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$
et elle ne nécessite pas de réduction au même dénominateur.
- Diviser par une fraction, c'est multiplier par son inverse à savoir
$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a \times d}{b \times c}.$$
On prêtera attention au trait principal de fraction !

- Une notation spéciale existe pour l'inverse d'un nombre. On peut noter pour a non nul
$$\frac{1}{a} = a^{-1}.$$

5 Puissances et racines carré

On rappelle que pour un nombre réel a quelconque et n un entier naturel non nul on définit
$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}.$$

Lorsque a est non nul, on pose $a^0 = 1$. Lorsque l'on a un entier négatif sous la forme $-n$ avec n un entier naturel, on définit

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}.}$$

Pour la multiplication, On a pour a, b des nombres réels et n, m des entiers relatifs

$$\boxed{a^n a^m = a^{n+m}, \qquad (ab)^n = a^n b^n.}$$

Pour la division, on a pour a, b des nombres réels avec $b \neq 0$ et n, m des entiers relatifs

$$\boxed{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.}$$

Enfin, pour les puissances de puissance, on a

$$\boxed{(a^n)^m = a^{n\times m}.}$$

Si x est un nombre positif, on appelle *racine carré* de x l'unique nombre réel positif a vérifiant $a^2 = x$. On le note $a = \sqrt{x}$.

On a les règles suivantes pour la racine carré

$$\boxed{\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.}$$

6 Calcul littéral

Le calcul littéral permet de manipuler des expressions contenant des variables ou des inconnues. Il repose sur les règles suivantes, également valables pour le calcul numérique.

- Le développement, faisant appel à la distributivité ou double distributivité

  $$a(b+c) = ab + bc, \qquad (a+b)c = ac + bc, \qquad (a+b)(c+d) = ac + bc + ad + db$$

  et il existe des déclinaisons pour obtenir la triple distributivité etc. En cas de doute, on n'hésitera pas à faire toutes les opérations avec les trois seules règles décrites.
- On dispose également des *identités/égalités remarquables*

  $$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \qquad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2.}$$

- La factorisation et l'opération inverse du développement. La lecture "à l'envers" des précédentes règles donnent alors la factorisation par l'identification d'un facteur commun à des termes d'une somme ou la lecture d'une identité remarquable développée.

On rappelle à toute fin utile que l'on a $a = a \times 1$, permettant de faire apparaître un facteur a commun dans une expression et de laisser 1 dans l'expression factorisée.

Il est possible d'envisager du calcul littéral avec des fractions (*fraction rationnelle de variables*). Il faut alors combiner les règles propres aux fractions avec celles décrites ci-dessus.

7 Egalités, inégalités, équations et inéquations

Une équation (resp. inéquation) est une égalité (resp. une inégalité) de deux expressions comportant au moins une inconnue (notées en général x, y, z...). Les solutions sont les valeurs de(s) inconnue(s) qui vérifient l'égalité (resp. l'inégalité).

Deux expressions sont dites égales et non équivalentes (cela n'a pas de sens). De la même façon, on dit que des équations ou inéquations sont équivalentes et non égales.

En règle générale, on tente toujours de résoudre les équations par des équivalences logiques. On dit en ce sens que des équations sont *équivalentes* si elles ont exactement les mêmes solutions. On passe d'une équation à une autre équivalente en général par une opération.

- Ajouter ou soustraire la même quantité de part et d'autre de l'égalité ou inégalité. On a pour tous a, b, c

$$a + c = b + c \Longleftrightarrow a = b \qquad a - c = b - c \Longleftrightarrow a = b$$

$$a + c \leqslant b + c \Longleftrightarrow a \leqslant b \qquad a - c \leqslant b - c \Longleftrightarrow a \leqslant b$$

$$a + c \geqslant b + c \Longleftrightarrow a \geqslant b \qquad a - c \geqslant b - c \Longleftrightarrow a \geqslant b$$

$$a + c < b + c \Longleftrightarrow a < b \qquad a - c < b - c \Longleftrightarrow a < b$$

$$a + c > b + c \Longleftrightarrow a > b \qquad a - c > b - c \Longleftrightarrow a > b$$

- Multiplier ou diviser par une quantité **non nulle** dans une égalité. On a pour a, b et c non nul

$$a \times c = b \times c \Longleftrightarrow a = b \qquad \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \Longleftrightarrow a = b.$$

- Multiplier ou diviser par une quantité **strictement positive** dans une égalité donne une inégalité de même sens équivalente. On a pour a, b et c strictement positif

$$a \times c \leqslant b \times c \Longleftrightarrow a \leqslant b \qquad \frac{a}{c} \leqslant \frac{b}{c} \Longleftrightarrow a \leqslant b$$

$$a \times c \geqslant b \times c \Longleftrightarrow a \geqslant b \qquad \frac{a}{c} \geqslant \frac{b}{c} \Longleftrightarrow a \geqslant b$$

$$a \times c < b \times c \Longleftrightarrow a < b \qquad \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \Longleftrightarrow a < b$$

$$a \times c > b \times c \Longleftrightarrow a > b \qquad \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \Longleftrightarrow a > b$$

- On change le sens d'une inégalité lorsque l'on multiplie ou divise par une quantité strictement négative. On a pour a, b et c strictement négatif

$$a \times c \leqslant b \times c \Longleftrightarrow a \geqslant b \qquad \frac{a}{c} \leqslant \frac{b}{c} \Longleftrightarrow a \geqslant b$$

$$a \times c \geqslant b \times c \Longleftrightarrow a \leqslant b \qquad \frac{a}{c} \geqslant \frac{b}{c} \Longleftrightarrow a \leqslant b$$

$$a \times c < b \times c \Longleftrightarrow a > b \qquad \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \Longleftrightarrow a > b$$

$$a \times c > b \times c \Longleftrightarrow a < b \qquad \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \Longleftrightarrow a < b$$

- De façon générale, on a pour tout a et b
$$a = b \Longrightarrow a^2 = b^2$$
mais pour avoir l'équivalence, il faut ajouter des cas
$$a^2 = b^2 \Longleftrightarrow a = b \text{ ou } a = -b \qquad a^2 = b \Longleftrightarrow a = \sqrt{b} \text{ ou } a = -\sqrt{b}(b \geqslant 0).$$
Ainsi, élever au carré une égalité (ou équation) ne conserve pas les équivalences.
- Le passage au carré conserve les inégalités lorsque les nombres sont positifs. On a pour a, b tous deux **positifs**
$$a \leqslant b \Longleftrightarrow a^2 \leqslant b^2 \qquad a \geqslant b \Longleftrightarrow a^2 \geqslant b^2$$
$$a < b \Longleftrightarrow a^2 < b^2 \qquad a > b \Longleftrightarrow a^2 > b^2$$
- Le passage au carré change les inégalités lorsque les nombres sont négatifs. On a pour a, b tous deux **négatifs**
$$a \leqslant b \Longleftrightarrow a^2 \geqslant b^2 \qquad a \geqslant b \Longleftrightarrow a^2 \leqslant b^2$$
$$a < b \Longleftrightarrow a^2 > b^2 \qquad a > b \Longleftrightarrow a^2 < b^2$$
- Le passage à la racine carré conserve les inégalités et les inégalités pour les nombres positifs. On a pour tous a, b positifs
$$\sqrt{a} = \sqrt{b} \Longleftrightarrow a = b \qquad \sqrt{a} \leqslant \sqrt{b} \Longleftrightarrow a \leqslant b \qquad \sqrt{a} \geqslant \sqrt{b} \Longleftrightarrow a \geqslant b$$
$$\sqrt{a} < \sqrt{b} \Longleftrightarrow a < b \qquad \sqrt{a} > \sqrt{b} \Longleftrightarrow a > b$$

Si on ne peut pas résoudre par équivalence donc par implications seules, alors il faudra faire une réciproque en examinant si toutes les solutions potentielles vérifient ou pas l'égalité ou inégalité de départ.

On rappelle que la règle du produit nul affirme que
$$AB = 0 \Longleftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0.$$
En revanche, on a pour B non nul (de sorte que la fraction existe)
$$\frac{A}{B} = 0 \Longleftrightarrow A = 0.$$
Résoudre une inéquation du type $AB \geqslant 0$ ou $\frac{A}{B} \geqslant 0$ mène à une étude du signe de l'expression AB ou $\frac{A}{B}$, pouvant se faire à l'aide d'un *tableau de signe.*

On rappelle à ce sujet que $AB \geqslant 0$ (resp. $AB \leqslant 0$) équivaut au fait que A et B sont de même signe (resp. de signe opposé).

La règle est identique avec le quotient $\frac{A}{B}$; on n'oubliera pas de signaler les *valeurs interdites* qui annulent B.

Enfin, la résolution d'une équation ou inéquation doit toujours être conclue par l'ensemble des solutions, donné par $\mathcal{S} = ...$.

- S'il n'y a aucune solution, on écrire $\mathcal{S} = \emptyset$ (ensemble vide).
- S'il y a un ensemble fini de solutions notées $x_1, ..., x_n$ (une ou plusieurs valeurs), on écrire
$$\mathcal{S} = \{x_1, ..., x_n\}.$$
- Si les solutions sont caractérisées par des inégalités, on notera l'ensemble à l'aide des intervalles connus.