Les bases du calculs.

1 Gymnastique

Recopier et remplacer les ? afin que les égalités soient vraies.
Les nombres placés dans les ? ne sont pas forcément égaux et peuvent être négatifs.

Exemple $\forall\ x \in \mathbb{C},\ 2x-3 = ?\,(x+?)$, vous devez écrire $\forall\ x \in \mathbb{C},\ 2x-3 = 2\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$

$\forall\ x \in \mathbb{C}-\{7/5\},\quad \dfrac{2x+3}{5x-7} = ?\dfrac{x+?}{x+?}$

$\forall\ x \in \mathbb{C}-\{7/5\},\quad \dfrac{2x+3}{5x-7} = ?\dfrac{1+?.x}{1+?.x}$

$\forall\ x \in \mathbb{C}-\{3/2\},\quad \dfrac{3x+5}{2x-3} = \dfrac{?.\,(2x-3)+?}{2x-3}$

$\forall\ x \in \mathbb{C}-\{-1/3,0\},\quad \dfrac{2x+1}{3x+1} = ?\dfrac{1+\frac{?}{x}}{1+\frac{?}{x}}$

$\forall\ x \in \mathbb{R}-\{-3/2\},\quad \dfrac{2}{(2x+3)^2} = \dfrac{?}{(x+?)^2}$

$\forall\ x \in \mathbb{R}-\{-3/2\},\quad \dfrac{2}{(2x+3)^2} = \dfrac{?}{(?.x+1)^2}$

$\forall\ x \in \mathbb{R},\quad \dfrac{(2x+1)^2}{(3x^2+1)^3} = ?\dfrac{(x+?)^2}{(x^2+?)^3}$

$\forall\ x \in \mathbb{R},\quad \left(x^2+x^3\right)^3 = x^?\left(1+x^?\right)^?$

$\forall\ x \in \mathbb{R}^*,\quad x^3+x = x^2\left(x^?+x^?\right)$

$\forall\ x \in \mathbb{R}-\{0\},\quad \left(\dfrac{x-2}{x^2+2}\right)^3 = x^?\left(\dfrac{1-2x^{-1}}{1+2x^{-2}}\right)^3$

$\forall x \in \mathbb{R},\quad ?(x+2)+?(x+3) = ?$

$\forall x \in \mathbb{R},\quad ?(x+2)+?(x+3) = ?x$

$\forall\ x \in [-3/2,+\infty[,\quad \sqrt{2x+3} = ?\sqrt{x+?}$

$\forall\ x \in [-3/2,+\infty[,\quad \sqrt{2x+3} = ?\sqrt{1+?x}$

$\forall\ x \in \mathbb{R}^*,\quad \sqrt{x^4+4} = x^?\sqrt{1+\dfrac{4}{x^?}}$

$\forall\ x \in]0,+\infty[,\quad \sqrt{\dfrac{2x^2}{2x+1}} = \dfrac{?\times x^?}{\sqrt{x+?}}$

$\forall\ x \in]-1/2,0[,\quad \sqrt{\dfrac{2x^2}{2x+1}} = \dfrac{?\times x^?}{\sqrt{x+?}}$

2 Factoriser, Fraction, Développer/Regrouper/ordonner.

Définition 1 Le produit se distribue toujours sur l'addition.

$\forall\ a, a', b, b' \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on a

$$a.(b+b') = a.b + a.b' \text{ et } (a+a').b = a.b + a'.b$$

Zéro est **toujours** absorbant. $\forall\ a \in \mathbb{C}$, $a.0 = 0$ et $0.a = 0$

Démonstration : **Toujours** : cela signifie que la propriété ce démontre,
Parfois : cela signifie que $\cdots$ On suppose que $a \in \mathscr{D}$

$\boxed{\text{On va montrer que } a.0 = 0}$

on va calculer $a.(a+0)$

$\rightarrow$ D'une part $a.(a+0) = a.a + a.0$ car le produit se distribue.

$\rightarrow$ D'autre part $a.(a+0) = a.a$ car $a + 0 = a$

Conclusion : $a.a + a.0 = a.a$

$\Longrightarrow a.0 = 0$ fini

On fait de même pour démontrer $0.a = 0$

`Cette démonstration n'utilise que les propriétés élémentaires de zéro et la distributivité, donc elle est valide dans tous les situations, CàD pour les fonctions, les matrices, le produit scalaire ou le produit vectoriel.`

Théorème 2 Il y a deux actions de base : Développer une expression et Réduire les fractions.

Développer une expression polynômiale.

Il faut en un seul coup *Développer/Regrouper/Ordonner*

$$(2X+1)(-3X+4) =$$

$$(X^2+X+1)(X^2-X+1) =$$

Réduire une fraction.

> Le formulaire dont $\dfrac{a/b}{c/d} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c}$ et surtout

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a/b}{c/1} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} \quad et \quad \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a/1}{b/c} = \frac{a}{1} \times \frac{c}{b}$$

> Quand on ajoute deux fractions,

*Attention : le dénominateur final **N**'est **PAS** le plus gros possible*

Exercice 1. Finir les calculs

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{}{12}$$

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(2n+2)}=\frac{}{2n(n+1)}$$

$$\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{}{n^2(n+1)^2}$$

Exercice 2. Développer $(2X-3)^3$, $\left(X^2+X+\dfrac{1}{X}\right)^2$

Exercice 3. Simplifier $A=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}$ $\quad B=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{2.3.4}$ $\quad C=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}$

Exercice 4. Le nombre $a\in\mathbb{C}$ est choisi afin que les dénominateurs ne s'annulent pas

$$A=\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1} \qquad B=\frac{1}{a}-\frac{2}{a^2}+\frac{1}{a^3}$$

$$C=\frac{1}{a\,(a+1)^2}-\frac{1}{a^2(a+1)} \qquad D=\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-a}$$

$$E=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2a+2} \qquad F=\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{a+1}$$

Exercice 5. Simplifier les expressions suivantes où x, y, z et t sont des réels non nuls dès qu'ils apparaissent au dénominateur.

$$A=\frac{\frac{x}{y}}{\frac{y}{x}} \qquad B=\frac{xy+xz}{xt} \qquad C=\frac{(xy)(xz)}{xt}$$

$$D=\frac{1+\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}}{2x+\sqrt{1+x^2}} \qquad E=\frac{1-\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}}{2x-\sqrt{1+x^2}}$$

Exercice 6. Dans les calculs, les nombres $a,b\in\mathbb{C}$ sont choisis afin que les dénominateurs ne s'annulent pas.

$$A=\frac{1-\frac{a}{a+b}}{\frac{a+b}{a}-1} \qquad B=\frac{a+\frac{1}{b}}{b+\frac{1}{a}} \qquad C=\frac{\frac{a}{b}-2}{\frac{b}{a}-\frac{1}{2}} \qquad D=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+a}}}$$

Exercice 7. Soit a,b,c trois réels positifs

1. Montrer que : $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left[\dfrac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2}\right]$
2. En déduire que : $3abc\leqslant a^3+b^3+c^3$.
3. Quand a-t-on égalité ?

Théorème 3

Déroulement des calculs.

> Étape 1 : On cherche les facteurs et on les factorise.

`Et quand on a des facteurs, on les garde !`

> Étape 2 : On simplifie les fractions, CàD $Fraction = \cdots = \dfrac{Haut}{Bas}$.

> Étape 3 : On normalise, CàD pour chacun des facteurs, développe-regroupe-ordonne.

Kulture indispensable.

La factorisation remarquable $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$

Le dénominateur final **N**'est **PAS** le plus gros possible

Exercice 8. [Correction] Simplifier les expressions suivantes

$A = (x+1)(x+2) + (x-1)(2x-3)$ $\quad$ $B = 1 - t - (t-1)(t-2)$

$C = (at+b)^2 - (at+b)(ax-2)$ $\quad$ $D = \left(x^2-1\right) - 2(x+1)^2$

$E = \left(x^2+2x+1\right) - (2x-1)(x+1)$ $\quad$ $F = {}^{1}/_{x} + x + 2\left(x^2+1\right)$

$G = t^{2n} - t^n$ $\quad$ $H = (x+1)^{n+1} - (x+1)^n$

Exercice 9. Les variables sont dans $\mathbb{R}$, les exposants dans $\mathbb{N}$ et les dénominateurs ne sont pas nuls.

Simplifier les expressions suivantes

$$A = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad B = \frac{x^2+x}{x+1}$$

$$C = \frac{x(x+1) - 3(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} \qquad D = \frac{x-1}{(2x+3)(x+2)} + \frac{2x-2}{(x-2)(2x+3)}$$

$$E = \frac{x^2+2x+1}{x^2-1} \qquad F = \frac{\frac{1}{x}+1}{1-\frac{1}{x^2}} \qquad G = \frac{e^{3x}}{e^x + e^{5x}}$$

Exercice 10. Pour les fonctions suivantes simplifier $f(x+1) - f(x)$

$f(x) = x^2 + x + 1 \qquad f(x) = x(x+1)(2x+1) \qquad f(x) = (x+1)(x+2)\cdots(x+n)$

3 Puissances.

Définition 4 Soit a un nombre entier/réel et b un nombre entier/réel.

Comment calcule-t-on a^b ?

> Lorsque $b = n$ est un entier positif, alors $a^n \overset{def}{=} \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n\ fois}$.

> Lorsque b est un entier/réel, alors $a^{-b} \overset{def}{=} {}^1/_{a^b}$.

> Lorsque $n = {}^1/_2$, alors $a^{\frac{1}{2}} \overset{def}{=} \sqrt{a}$.

> Lorsque $b =$ bof, alors $a^b \overset{def}{=} e^{b\ln(a)}$.

Complément autour de 0^b, de a^0 et de 0^0.

Lorsque $b \neq 0$, les définitions classiques donnent $0^b = 0$.

Lorsque $a \neq 0$, on convient que $a^0 = 1$ Remarque : Aucune des définitions classiques ne s'appliquent.

Pour calculer 0^0, on a un problème car Soit $0^0 = 0^b = 0$, Soit $0^0 = a^0 = 1$.

En algèbre, $0^0 \overset{def}{=} 1$ en analyse, 0^0 n'existe pas c'est une FI.

Théorème 5

> **À méditer**

Lorsque, pour calculer a^b, plusieurs formules sont utilisables,
on obtient toujours le même résultat.

Question : Est ce évident que $2^2 = a^2 = a \times a = 4$ et $2^2 = a^2 = e^{2\ln(a)}$ donne la même chose ?

> **Formulaire**

$$a^{b+c} = a^b\, a^c$$
$$(ab)^c = a^c\, b^c$$
$$a^{-b} = \frac{1}{a^b} \quad et/ou\ a^{b-c} = \frac{a^b}{a^c}$$
$$a^0 = 1$$

$$\left(a^b\right)^c \neq a^{(b^c)}$$
$$a^{b^c} \overset{def}{=} a^{(b^c)} = Rien$$
$$\left(a^b\right)^c = a^{bc}$$

$$\text{En particulier : } z^{2^n} = z^{(2^n)} \neq \left(z^2\right)^n = z^{2n}$$

> **Kulture.** $(-1)^{pair} = 1$ et $(-1)^{impair} = -1$

Démonstration :

Un formulaire cela se démontre

Comme une puissance entière est une succession de produit, le formulaire se démontre simplement en détaillant les produits

> $a^2.a^3 = (a.a).(a.a.a) = a.a.a.a.a = a^5 = a^{2+3}$

> $a^2.a^{-3} = a^2.\frac{1}{a^3} = (a.a).\frac{1.}{a.a.a} = \frac{1}{a} = a^{-1} = a^{2-3}$

> $(a.b)^3 = (a.b).(a.b).(a.b) = (a.a.a).(b.b.b) = a^3.b^3$

> $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = ... = \frac{a^3}{b^3}$

$$\text{Et enfin } (a^n)^m = \underbrace{a^n.a^n...a^n}_{m\ \text{fois}} = a^{n+n+...+n} = a^{n.m}$$

Exercice 11.

1. À quoi est égal $\dfrac{4^{12}}{2^{25}}$

   ☐ $\dfrac{1}{2^{11}}$ ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ 2 ☐ 2^{11}

2. À quoi est égal $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$

   ☐ $\sqrt{2}$ ☐ 2 ☐ $\sqrt{2}^{2\sqrt{2}}$ ☐ ne se simplifie pas

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. À quoi est égal $2^n + 2^n$

   ☐ 4^n ☐ 4^{n+1} ☐ 2^n ☐ 3^n

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. À quoi est égal $2^n \times 2^n$

   ☐ 2^{2n} ☐ 2^{2+n} ☐ $2^{(n^2)}$ ☐ 4^{2n}

5. Soit $n, p \in \mathbb{N}$. À quoi est égal $2^n \times 3^p$

   ☐ 6^{np} ☐ 6^{n+p} ☐ 5^{n+p} ☐ ne se simplifie pas

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. À quoi est égal $(-1)^{-2n-1}$

   ☐ -1 ☐ 1 ☐ cela dépend de la parité de n

Exercice 12. Simplifier les expressions suivantes

$$A = (2^3)^5 \qquad A' = (2^5)^3 \qquad B = 2^{(3^5)} \qquad B' = 2^{(5^3)}$$
$$C = 2^3\,2^5 \qquad C' = 2^3\,5^3 \qquad D = (3^6)^5 - (9^5)^3$$

Exercice 13. Exprimer en fonction de $a = 2^n$

$$A = 2^{n+3} \qquad B = 2^{2n+1} \qquad C = 2^{-2n} \qquad D = (-2)^{2n+3}$$
$$E = \frac{4^{n+1}}{2^{1-3n}} \qquad F = 2^{n+3} - 2^{2n} \qquad G = 8^{2n}$$

Exercice 14. Écrire sous forme d'une puissance de $10^{\square}$ les nombres

$$A = \frac{10^{-9}.10^4}{(10^{-3})^2} \quad B = \frac{\left(10^{-3}\right)^{-2}.\left(10^4\right)^3}{\left(10^3\right)^2} \quad C = \frac{1000.100^2}{\left(10^{-2}\right)^{-3}} \quad D = \frac{\left(0,1.10^3\right)^2.100}{\left(100.10^{-3}\right)^3.1000}$$

Exercice 15. On considère a, b deux complexes et n, m dans $\mathbb{Z}$.
Simplifier les complexes suivants. Les nombres a et b sont choisis afin que les dénominateurs ne s'annulent pas

$$A = \frac{\left(a^n\right)^3 + \left(a^2\right)^n}{1 + a^n} \qquad B = \frac{a^{n+m}.\left(a.b^n\right)^m}{\left(\frac{a^2}{b}\right)^n.\left(a.b^m\right)^n}$$

$$C = \frac{a}{b^{1-n}}.\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^n.\left(\frac{a}{a-b}\right)^{n+1} \qquad D = \left(a^2\right)^n.\frac{\left(1 + \frac{1}{b}\right)^n}{(a+ab)^n}$$

4 Exponentielle et logarithme.

Exercice 16. Vrai ou faux

	V	F
$e^{x+y} = e^x\, e^y$	☐	☐
$e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$	☐	☐
$e^{-x} = -e^x$	☐	☐
$e^{xy} = e^x + e^y$	☐	☐
$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$	☐	☐
$\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{\ln(x)}$	☐	☐

	V	F
$\ln\left(\dfrac{1}{2}x\right) = \sqrt{\ln(x)}$	☐	☐
$\ln\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(x)$	☐	☐
$\ln(e^{-2}) = -2$	☐	☐
$e^{\ln(5)} + e^{\ln(3)} = 8$	☐	☐
$e^{\ln(5)} + e^{-\ln(3)} = 2$	☐	☐
$\ln\left[(x^3+1)^2\right] = 2\ln(x^3+1)$	☐	☐
$\ln(e^x+1) = x + \ln(1+e^{-x})$	☐	☐

Exercice 17.

1. À quoi est égal $\ln(3^4) + \ln(3^2) - \ln(3^6)$

   ☐ 1 ☐ 0 ☐ e ☐ ne se simplifie pas

2. Soit $x > 0$. À quoi est égal $\ln(x+1) - \ln(x)$

   ☐ $\ln\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$ ☐ $\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ ☐ $-\ln(x)$ ☐ $\ln(1)$

3. Soit $x > 0$. À quoi est égal $\sqrt{\ln(x)}$

   ☐ $\dfrac{1}{2}\ln(x)$ ☐ $\ln\left(\dfrac{1}{2}x\right)$ ☐ $\ln(\sqrt{x})$ ☐ ne se simplifie pas

4. Soit $x > 0$. À quoi est égal $\sqrt{x^{\frac{4}{3}}}$

   ☐ $\ln\left(\dfrac{4}{3}x\right)$ ☐ $\dfrac{4}{3}\ln(x)$ ☐ $\ln\left(\dfrac{4}{3}\right) + \ln(x)$ ☐ $x\ln\left(\dfrac{4}{3}\right)$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. À quoi est égal $\dfrac{1}{e^x}$

   ☐ $-e^x$ ☐ e^{-1} ☐ $e^{\frac{1}{x}}$ ☐ ne se simplifie pas

6. À quoi est égal $\ln(4) \times \ln(\sqrt{2})$

   ☐ $\ln(4+\sqrt{2})$ ☐ $\ln(4\sqrt{2})$ ☐ $\ln(2)$ ☐ $\ln^2(2)$

7. Soit $n \in \mathbb{Z}$. À quoi est égal $\ln(e^n) - 2e + \ln(1)$

   ☐ $e^n - 2e + e$ ☐ $e^n - 2e$ ☐ $n - 2e$ ☐ $n - 2e + 1$

8. À quoi est égal $\ln(2+\sqrt{3}) \times \ln(2-\sqrt{3})$

   ☐ 1 ☐ 0 ☐ 4

5 Factoriel.

Définition 6 Factoriel d'un entier positif.
On considère $n \in \mathbb{N}^*$
Le nombre "factoriel n", noté $n!$ est l'entier

$$n! = 1 \times 2 \times .... \times n = n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1$$

Convention : $0! = 1$.

Exemple. On a facilement

$$0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 1.2 = 2, \quad 3! = 1.2.3.4 = 6, \quad 4! = 1.2.3.4 = 24, \quad 5! = 120$$

On a aussi

$>$ 100! = 3628 800, 93 326 215 443 944 152 681 699 238 856 266 700 490 715 968 264 381 621 468 592 963 895 217 599 993 229 915 608 941 463 976 156 518 286 253 697 920 827 223 758 251 185 210 916 864 000 000 000 000 000 000 000 000

$>$ 2017! = C'est un nombre de 5792 chiffres = 46912386 064.................361 376 390 000

Le nombre 2017! se termine par **exactement** 502 zéros.

Théorème 7 Formulaire sur $n!$

$>$ **Factorisation** : Dans $n!$, il y a plein de facteurs et on peut jouer avec

$>$ **Récurrence** : $(n+1)! = (n+1)\,n!$ et $n! = n\,(n-1)! = \dfrac{(n+1)!}{n+1}$

Exercice 18. Calculer ou simplifier

$$\begin{aligned}
\frac{7!}{5!} &= \\
\frac{n!}{(n-2)!} &= \\
(n+2)! - 2\,(n+1)! + n! &= \\
\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} &=
\end{aligned}$$

Exercice 19. [Correction] On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose que $k \in \{1, 2, .., n\}$
Simplifier les expressions suivante

$$A = (n+1)! - (n-2)! \qquad B = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$C = \frac{n!}{(k+1)!} - \frac{(n+1)!}{k!} \qquad D = (n-k)! - (n-k+1)!$$

6 Coefficient du binôme.

Définition 8 **Coefficient du binôme d'ordre n, k.**

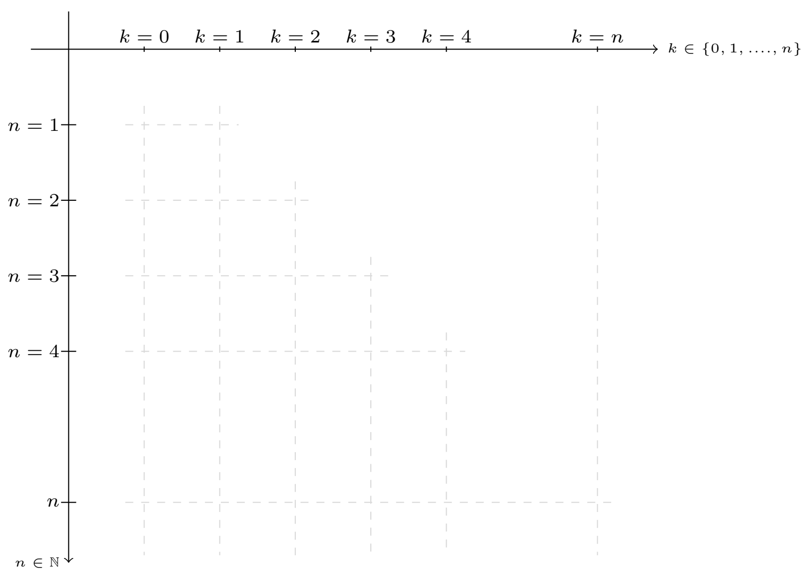
$$\text{Lorsque } 0 \leqslant k \leqslant n, \quad \text{alors} \quad \binom{n}{k} \overset{def}{=} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Exercice 20. Calculer

$$\binom{7}{2} =$$
$$\binom{n}{0} =$$
$$\binom{n}{1} =$$
$$\binom{n}{2} =$$
$$\binom{n}{n} =$$

Définition 9 **Le triangle de Pascal**

Le triangle de Pascal, c'est une façon de présenter les coefficients du binôme $\binom{n}{k}$



Exercice 21. On considère $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, ... , $\binom{n}{n-2}$, $\binom{n}{n-1}$, $\binom{n}{n}$,
2. On suppose que $k \in \{1, 2, .., n\}$. Calculer $\binom{n}{n-k}$ en fonction de $\binom{n}{k}$
3. On suppose que $k \in \{1, 2, .., n\}$. Calculer $\binom{n}{k}$ en fonction de $\binom{n-1}{k-1}$

Exercice 22. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, 1, 2, .., (n-1)\}$

Simplifier $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ et à la fin mettre le résultat sous la forme $\binom{\square}{\triangle}$

Exercice 23. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, 1, 2, .., (n-1)\}$

Simplifier puis déterminer le signe de $\binom{n}{k+1} - \binom{n}{k}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 24. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \{2, 3, ..., n-2\}$

Simplifier $\binom{n-2}{p} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2}$ et exprimer le résultat sous la forme $\binom{\square}{\triangle}$.

Exercice 25. [Correction] Pour les suites suivantes, simplifier puis donner le signe de $u_{n+1} - u_n$.

$$a_n = \frac{11^n}{n!} \qquad b_n = \binom{2n}{n}$$

Exercice 26. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère

$P_n =$ Le produit des entiers pairs de 2 à $2n$

ET

$I_n =$ Le produit des entiers impairs de 1 à $(2n+1)$

1. Détailler la valeur de P_n puis exprimer P_n à l'aide entre autre de factoriel.
2. Calculer $I_n \times P_n$
3. Calculer I_n à l'aide entre autre de factoriel.

Correction.

Solution de l'exercice 8 (Énoncé)

$A =$ *Rien à factoroser, on développe* $\quad B =$ *On factorise* $(t-1)$

$C =$ *On factorise* $(at+b)$ $\quad C' =$ *On factorise* $(at+b)$

$D =$ *On factorise* $(x+1)$ $\quad D' =$ *On factorise* $(x+2)$

$E =$ *On factorise* $(x+1)$ $\quad F =$ *On simplifie les fractions puis on factorise* (x^2+1)

$G =$ *On factorise* t^n $\quad H =$ *On factorise* $(x+1)^n$

Solution de l'exercice 19 (Énoncé)

$A =$ *On factorise* $(n-2)!$ $\quad B =$ *On factorise* $\dfrac{1}{n!}$

$C =$ *On factorise* $\dfrac{n!}{k!}$ $\quad D =$ *On factorise* $(n-k)!$

Solution de l'exercice 23 (Énoncé) Voir les corrections des exercices 18 et 20

Solution de l'exercice 25 (Énoncé)

> On a

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - a_n = \frac{11^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{11^n}{n!} = \frac{11^n}{n!}\left[\frac{11}{n+1} - 1\right] = \frac{11^n}{n!}\left[\frac{11-n}{n+1}\right]$$

Donc $a_{n+1} - a_n < 0$ à partir du rang $N_0 = 11$

> On a

$$\begin{aligned}
\forall\, n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} - b_n = \binom{2n+2}{n+1} - \binom{2n}{n} &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!} - \frac{(2n)!}{n!\,n!} \\
&= \frac{(2n)!}{n!\,n!}\left[\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} - 1\right] \\
&= \frac{(2n)!}{n!\,n!}\left[\frac{2(2n+1)}{(n+1)} - 1\right] \\
&= \frac{(2n)!}{n!\,n!}\left[\frac{4n+2-(n+1)}{(n+1)}\right] \\
&= \frac{(2n)!}{n!\,n!}\,\frac{3n+1}{(n+1)} \geqslant 0
\end{aligned}$$

Donc pour tout $n,\ b_{n+1} - b_n \geqslant 0$.

Solution de l'exercice 26 (Énoncé)

1. On a

$$\begin{aligned}
P_n &= 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n-2) \times (2n) \\
&\qquad \textit{Il y a n termes} \\
&= \underbrace{2.2...2}_{n\ fois}\ 1.2.3....n = 2^n\, n!
\end{aligned}$$

2. On a $I_n = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n+1)$, ainsi

$$\begin{aligned}
I_n \times P_n &= (1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n+1))\,.\,(2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n-2) \times (2n)) \\
&= 1.2.3....(2n-1)(2n)(2n+1) \\
&= \textit{\textbf{Le produit de tous les entiers de 1 à (2n+1)}} \\
&= (2n+1)!
\end{aligned}$$

3. Conclusion

$$I_n = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n+1) = \frac{I_n \times P_n}{P_n} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$